

Az arany metszés története

Nem hiszem, hogy az isteni harmónia kifejezhető volna egy számmal, azt azonban annál valószínűbbnek tartom, hogy ennek a harmóniának létezik egy algebrailag is kifejezhető vetülete. Talán nem is a vagyontárgyaink összeszámlálására találták fel az algebrát? Lehetséges, hogy az algebra olyan filozófiai tételeket tartalmaz, amik például a harmóniát is meghatározzák?



Adjunk egy kis szabadságot az elménknek! A harmónia a dolgok, események, érzelmek egymáshoz fűződő viszonya, amit mindig egy esztétikai értékrend és a mögötte álló filozófia határoz meg. Létezik-e az abszolút harmónia? Mert ha igen, akkor a korreláció fordított, s nem az értékrend és filozófia határozza meg az abszolút harmóniát, hanem inkább emez definiálja amazokat. Márpedig az abszolút fogalmak kifejezhetők, vagy mondjuk úgy, tömöríthetők az algebra nyelvén.

Az arany metszés a tárgyakkal egymáshoz fűződő arányáról beszél, a mozdulatok, valamint a térből kimetszett terek és idomok kapcsolatáról szól. Rögtön fölmerül egy fontos kérdés: mit mivel arányítsunk? Milyen párokat vagy viszonyrendszereket

állítsunk fel? Egy közönséges szék esetében vizsgálhatjuk a háttámla és a lábak arányát, vagy az ülőfelület és a háttámla arányát. Ez a viszonyszám lehet területi arány, de az sem biztos, hogy idomokat kell arányítanunk, lehet térfogatot térfogattal. Az első lépés tehát az aránypárba állítandó alapegységek beazonosítása.

Mindig is vonzott a tánc művészete, leginkább az indiai klasszikus táncok ragadtak meg. A nyugati festőművészetben talán Degas táncosnő-képei a legismertebbek. Ezek a balerinák szinte súlytalanok, tökéletes arányokkal mozdulnak, a képeken a tánc éteri minősége tölti fel testüket és ruházatukat. Szerettem volna tetten érni a légiesség eme technikai lényegét. Magam is próbálkoztam a táncoló női alak ábrázolásával, kucsipudi, manipuri és kathaki táncosnőket rajzoltam meg. Az első pillanatban azt gondolná az ember, egy-két könnyed vonal, és kész is az alkotás. A valóság azonban kicsit eltér ettől. A tánc – és főként az indiai klasszikus tánc – mozdulatai mértani pontosságúak, valószínűleg nem tudatosan, inkább rutinszerűen. A kép csak akkor sikerülhet, ha megtaláljuk az arányokat, és szinte megszerkesztjük a képet mozdulataiban.

Az aranymetszés matematikája

Sokan sokat foglalkoztak már az aranymetszés témájával, könyvtárnyi irodalom áll rendelkezésre. Hadd tekintsük át röviden az aranymetszés jelentését és történelmi hátterét! Maga a tétel nem túl bonyolult: aranymetszésről akkor beszélhetünk, ha például egy két részre osztott szakasz két része úgy aránylik egymáshoz, mint ahogy a nagyobbik rész aránylik a teljes szakaszhoz. Vagyis a nagyobbik rész az egész és a kisebbik rész mértani középarányosa.

A fentiekkel egyenértékű az a megfogalmazás, miszerint a nagyobbik rész úgy aránylik a kisebbik részhez, mint a kisebbik rész a két rész különbségéhez:

Itt érhető tetten az aranymetszés titka: a fent említett esetekben mindig egy állandó arányszámot kapunk. Az arányszám jelölésére a görög phi betűt használjuk, melynek értéke 1,618.... A jelölés Phidiasz görög szobrász nevéből származik. Pontosabb értéke:

A phi-vel először írásos formában Eukleidész Elemek című művében találkozunk. A II. könyv 11. tétele a következőképpen hangzik: „Adott egyenest osszunk fel úgy, hogy az egészből és a részek egyikéből alkotott téglalap egyenlő legyen a másik rész négyzetével.” (Gajdácsi Glória szakdolgozata alapján)

Az aranymetszéssel már az ókorban is foglalkoztak, Egyiptomban valószínűleg ismerték a phi-t. A gízai piramis szerkesztésében is érvényesül az aranymetszés, mert az alapél fele és az oldallap magassága ezt az arányt mutatja.

Mint a fentiekben láttuk, az aranymetszés a görögök számára sem volt ismeretlen, s az indiaiak is foglalkoztak vele. Hémacsandra (1089-1172) dzsainista író a szanszkrit költészet ritmusát vizsgálta. A szótag a szanszkritban lehet hosszú és rövid. A hosszú szótag kétszer olyan hosszú, mint a rövid. Hémacsandra azt a kérdést tette fel, hány formája lehet a ritmus motívumainak. Sokat foglalkozott a nyelvten, filozófia, tradíció és a korabeli történelem kapcsolatával, s a verselésben ismerte fel a misztikus arányt. Kutatásai során az Európában Fibonacci-számként ismert sorozathoz jutott el 1150-ben, jó 50 évvel korábban, mint az olasz tudós. Hémacsandra Gudzsarát államban, Dhandhukában született, Ahmadabadtól 50 kilométerre délnyugatra. Szüleitől a Csandradéva nevet kapta. Fiatalon szerzetesnövendékként élt egy dzsainista templomban és felvette a Szómacsandra nevet. 1110-ben a svétambara rend tagja lett, s az Ácsárja Hémacsandra nevet kapta. Tudományos mestere Gopála, a matematikus volt.

Hémacsandra Kumárapála uralkodó (1143-73) tanácsadójaként működött. Összeállította a szanszkrit és prákrit nyelv grammatikáját, s írt az indiai filozófia minden irányzatáról. Legismertebb műve A hatvanhárom nagy ember élete.

Miért küszködtek a világ különböző részein ezzel a bonyolult arányszámmal, s pontos mértani megszerkesztésével? Mit sejtettek meg az egyiptomi, görög és indus tudósok? A matematikát a tudományok tudományának nevezik, amely állítás az aranymetszés kapcsán is beigazolódn látszik. A költészetet, a szobrászatot, a festészetet és a zenét, s mint később láthatjuk, a tudomány egészét az algebra és geometria fűzi egybe, hiszen a matematika mindegyikben jelen van. Ráadásul a matematika nem egyszerűen jelen van, hanem a különböző szakterületeken azonos összefüggéseket tesz láthatóvá, mintha egy másik, közös síkon jelenítené meg a valóságot. Talán a matematika adja kezünkbe az ismeretlen teremtés kulcsát? Vizsgáljuk meg az aranymetszés geometriáját!

A szakasz megszerkesztése és a szabály szerinti felosztása nem evidens, az ötszög szerkesztéséhez viszont mindenképpen ismerni kellett. A 72 fokos szögek geometriája már ismert volt Eukleidész vagy Pitagorasz számára. Első lépésként egy speciális egyenlő szárú háromszöget szerkesztettek, olyat, melynek az alapon álló szögei kétszer akkorák, mint a csúcsszög. Így alakult ki az aranyháromszög (72, 72, 36 fokos szögek).

A szerkesztésnek több útja is lehetséges, de minden esetben szükségünk van az arany háromszögre, valamint a phi ismeretére és használatára. Ilyen módon vált lehetségessé a pentagram és az ötágú csillag pontos megszerkesztése is, aminek az okkultizmusban jelentős szerepe volt. Nem állíthatjuk, hogy a pentagram negatív szimbólum volna, hiszen az isteni arányszám az alapja. Szinte minden okkult könyvben találkozhatunk vele, innen eredhet negatív felhangja. Az okkult tudományok ismerői a teremtés aktusát akarták megragadni vele.

Az öt gyakran jelenik meg a mitológiában is. Az indiai tradícióban az öt elem – föld, víz, tűz, levegő, éter – alkotja az akasa-univerzumot. Kínában kicsit másként fogalmazzák meg az elemeket, csakúgy, mint a druidáknál: víz (tenger), föld (fém), tűz (szél), levegő (ég), természet (fa), de lényegileg ugyanarról van szó. A pentagram tulajdonképpen nem más, mint két egymásra csúsztatott háromszög, vagy öt aranyháromszög egy középpont köré rendezve. Az ötágú csillag egy álló alakrajzként a mikrokozmosz és az ember jelképe, így ember-jegy, az embert magát jelzi, egyben a cselekvés jelképe is. Érdekes párhuzam az ember öt-öt ujjja. Püthagorasz követői a tízes mellett az ötöst is tökéletes számnak tartották, Babilonban pedig az egészséggel feleltették meg.

Az aranymetszés témájával foglalkozva, mindenképpen meg kell említenünk Fibonaccit, azaz Leonardo Pisanot, a XII-XIII. század fordulóján alkotó olasz matematikust, aki a tízes alapú helyi értékes számrendszer egyik meghonosítója volt. Mint ismeretes, a helyi értékrendszer arab közvetítéssel jutott el Európába. A Liber Abaci című munkájában egy olyan számsorozatról beszél, ami nagyon megközelíti a phi értékét.

Fibonacci 1170-ben született az itáliai Pisában. Az észak-afrikai Bugiában – a mai Bendzsájában – nőtt fel, itt folytatott tanulmányokat, majd 1200 körül visszatért Pisába. Fibonacci munkásságában határozottan felismerhető az arab matematikusok hatása, akik talán tanították is ott töltött évei során. Fibonacci számos matematikai értekezést írt, és jelentős matematikai felfedezéseket tett, amelyek nagyon népszerűvé tették őt szerte Itáliában. 1250-ben halt meg. A Fibonacci-számsorban a sorozat harmadik elemétől kezdve bármely tag az azt megelőző két tag összege:

Az aranymetszésre visszagondolva, tekintsük a teljes szakaszt 1000-nek. Ekkor az aranymetszés szabályai szerint az arány a következőképpen alakul:

Kerekített értékek: 2, 3, 5, 8, 13, 22, 36, 58, 90, 146, 236, 382, 618, 1000, A Fibonacci által kapott összefüggés formailag hasonló az aranymetszésnél kapott egyenlethez, és (a harmadik elemtől) alkalmas a sorozat előállítására:

és így tovább. Az első néhány Fibonacci-szám: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946...

A kapott arány akkor egyezne meg az aranymetszéssel, ha a Fibonacci-sorozat egymást követő elemeinek hányadosa ugyanaz az érték lenne, vagyis az elemek geometriai sorozatot is alkotnának. Az elemek számának növelésével azonban ez a hányados egy állandó számhoz, az aranymetszéssel kapott arányához közelít.

Négyzetek segítségével is ábrázolhatjuk a sorozatot, ahol F1 és F2 egy-egy egységnyi négyzet (1-1). A följük helyezett F3 oldallapja két egységnyi lesz. A mellé helyezett F4 oldala F2 + F3 lesz, és így tovább. Az egymást követő négyzetek aránya azonos a Fibonacci-sorozat arányaival. Nézzhetjük úgy is, hogy az első téglalap (F1 és F2 együtt) oldalainak aránya, illetve a második téglalap (F1, F2, F3) oldalainak hossza azonos lesz a Fibonacci-sorozat számaival.

Aranymetszés a tudományban

A kvázi-kristályok esetében fedezték fel az úgynevezett arany rombuszokat, melynek szögei 72 és 108 fokosak, ezek a Penrose-csempék. Roger Penrose a XX. század hetvenes-nyolcvanas éveiben foglalkozott a témával. A felfedezésnek nagy jelentősége volt a kristályok kutatásában. A rombuszok belső terei az aranymetszés arányait mutatják.

Penrose 1976 májusában a következőket írta kollégájának, Gardnernek: „Az is lehetséges, hogy e fölismerések a biológia szempontjából is jelentősek lehetnek. Ne feledjük, hogy bizonyos vírusok szabályos dodekaéder és ikozaéder alakban növekednek. Mindig is zavarba ejtő kérdés volt, hogyan csinálják ezt? Ammann nem-periodikus testeivel viszont, mint alapegységekkel, kváziperiodikus „kristályokhoz” juthatunk; olyan, kristálytanilag látszólag lehetetlen hasadási irányokkal, melyek síkjai dodekaédert vagy ikozaédert határoznak meg. Lehetséges, hogy a vírusok növekedése is ilyesfajta nem-periodikus egységen alapul – vagy túlságosan merész ez az elképzelés?”

A természetben számos helyen találkozhatunk olyan formációkkal, melyek az aranymetszés arányait viselik magukon: csigavonalban, a levelek elrendezésében, sejteken belül, vírusoknál vagy más területeken. Létezik az úgynevezett arany szög is, amely $\cos = 0,618034\dots$. A szög értéke: $= 51^\circ 49' 43''$. Ezzel a szöggel találkozhatunk például Krisztus-monogram X-e és a P betű szárai között vagy Szent István betűjelénél.

Az aranytéglalap oldalainak aránya megegyezik a phi értékével.

Platonikus testeknek nevezzük a szabályos testeket, vagyis azokat a konvex poliédereket, melyeknek élei, élszögei és lapszögei egyenlők. Összesen öt ilyen test létezik: a tetraéder, a hexaéder, az oktaéder, a dodekaéder és az ikozaéder, melyek közül az utóbbi három vizsgálható az aranymetszés szempontjából. Az oktaéder egy ikozaédert rejt magában oly módon, hogyha az oktaéder éleinek aranymetsző pontjait összekötjük, egy ikozaédert kapunk eredményül.

Aranymetszés a művészetben

A reneszánsz korában többen behatóan tanulmányozták az emberi test arányait. Leonardo da Vinci a festészetről szóló művének (latin címe Trattato della Pittura) hetedik fejezetében tárgyalja az emberi test arányait és mozdulatait. Leonardo a csontok arányait mérte és kutatta. Ezt a tevékenységét, amit később az elhíresült rajzon mutatott be, Marcus Vitruvius magasztalta munkájában. Később Luca Paccioli könyvet írt az isteni arányról (latinul Divina Proporzione). Albrecht Dürer szintén írt a tárgyról, de ide tartozik Gottfried Schwadow könyve is az emberi test arányairól, 1834-ből.

Az aranymetszésről többnyire mindenkinek Leonardo Vitruvius-tanulmánya jut eszébe (lásd a nyitó képen), pedig az aranymetszéssel az élet, a természet számos területén találkozhatunk. Ezt a matematikai tételt mégis a művészet tette közismertté a harmónia, a szépség szimbólumaként. Az aranymetszést a festészet és a szobrászat számos területén alkalmazták. Dürer és Michelangelo is az aranymetszés szabályai szerint komponálta alkotásait, s itt kell említsük Csontvári Kosztka Tivadart, a Napút festőjét is. Képeinek táblája, belső szerkezete szigorúan tervezett volt, s az a komponáltság nyugalmat sugároz, a nézőben a teljesség érzetét kelti. A képekből nem hiányzik semmi, de elhagyni sem lehetne róluk semmit. Csontvári esetében a térbeli határok egybemosódó megfogalmazása sem töri meg ezt a harmóniát.

Az építészet és a szobrászat is felhasználta az aranymetszés ismeretét, már a piramisépítészettől kezdve. Az ókorban az emberi test arányait alkalmazták az építészetben is. Az arány szerepe a költészetben talán kevésbé ismert, pedig itt is nagy fontosságú. Egy zeneműnek – éppúgy, mint bármely más alkotásnak – az arányai adják meg a tetszetős méreteit. Bartók zenéjének szerkezetében a tobozok csavarodásának spirálja figyelhető meg. A színpadi művekben, a drámákban majdnem kiszámítható az egyes fölvonások és jelenetek közti arány. Elterjedt a hosszú

expozíció a gyors és csattanós befejezés mellett. Az arány, mint szerkesztési elv a jellemeknek egymáshoz viszonyulásában, a párbeszéd méreteiben és sok egyéb strukturális egységben is mutatkozik. Az arányosság alkalmazásának ugyanakkor könnyednek és természetesnek kell lennie, mert ha az alkotáson átsüt a kiszámítottság, hűvös és élettelen lesz a mű.

Úgy tűnik, a matematika olyan lehetőségeket rejt magában, ami a titkos tudományok egyik alappillérvé tette, vagy talán fordítva, belőle virágozott ki az ezotéria sok-sok ága. A rendkívül szerteágazó vizsgálódásoknak se vége, se hossza. Lassan apró részre bontottuk az anyagvilágot, de még mindig hiányzik valami, ami értelmezi a rendszert, és kapcsolatot teremt a feltárt valóság legtávolabbi részletei között is. Ilyen természetes algoritmus lehet az arany metszés, az isteni arányosság alapja. Ez a jelenségekben benne rejlő kulcs, a magasabb minőség matematikai vetülete, ami az élet számos területén ott rejtőzik, hol szemmel láthatóan, hogy ismeretlenül. A művészi arányosság vizsgálata olyan pont, ahol az isteni harmónia számunkra is észlelhetővé válik.

Összeállította: Ubornyák Katalin

Matematikai szakértő: Erdélyi Ferenc